DERLEME REVIEW

Dairesel Verilerde Tekdüzelik Testleri

Uniformity Tests in Circular Data: Review

İsmet DOĞAN,[a]
Nurhan DOĞAN[a]

[a]Biyoistatistik ve Tıbbi Bilişim AD, Afyon Kocatepe Üniversitesi Tıp Fakültesi,

Geliş Tarihi/*Received:* 19.03.2015
Kabul Tarihi/*Accepted:* 13.06.2015

Yazışma Adresi/*Correspondence:*
Nurhan DOĞAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Tıp Fakültesi,
Biyoistatistik ve Tıbbi Bilişim AD,
Afyonkarahisar,
TÜRKİYE/TURKEY
nurhandogan@hotmail.com

ÖZET Yönsel veri içerisinde önemli bir yer tutan dairesel veriler ile birçok farklı alanda ilgilenilmektedir. Açısal verilere günün saatine (hastane ziyaretleri, doğum zamanları vb.) veya yılın günlerine (işsizlik veya satışta meydana gelen değişimler) bağlı zaman içinde meydana gelen periyodik olaylar örnek olarak verilebilir. Dairesel verinin basit ancak temel özelliği, ölçeğin başlangıç ve bitiş (0° ile 360°) değerlerinin çakışmasıdır. Üstelik bu tür verilerde aritmetik ortalamanın özetleyici bilgi olarak kötü bir gösterge olma ihtimali yüksektir. Çünkü 1° ile 359°'nin ortalamasının 180° olması mantıklı değildir. Bu durumda çözüm, ortalama vektör yönünün dairesel ortalama olarak kullanılmasıdır. Açısal veya dairesel verilerin istatistiksel analizi doğrusal veri analizinden farklıdır. Sınırsız ve iki kuyruklu doğrusal dağılımların aksine dairesel dağılımlar sonlu bir yapı sergilemektedir. Bundan dolayı 0° ile 360° bir dairede gerçekte aynı noktadır. Dairesel verilere ait istatistikler temelde, düzlemde birim vektör olarak ifade edilen gözlemler ile ilgilidir. Dolayısıyla örneklem uzayının daire veya küre olmasından dolayı, tek değişkenli veya çok değişkenli ölçüm değerlerinin analizinde kullanılan standart yöntemler kullanılmamalıdır. Bu tür örneklem uzaylarının dikkate alındığı durumlarda, özel olarak geliştirilmiş dairesel yöntemlerin kullanılması gerekmektedir. Dairesel verilerin söz konusu olduğu birçok durumda yapılan istatistiksel analizlerde dikkate alınan yokluk hipotezinde tek düze dağılım tüm yönlerin ortaya çıkmasının olasılıklarının eşit olduğunu ifade etmektedir. Bu çalışmada, açısal verilerde tekdüzelik testi olarak geliştirilmiş sekiz farklı yöntem tanıtılmış ve literatürden elde edilen bilgilerden yararlanarak yöntemler birbirleri ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İstatistik, parametrik olmayan; istatistik dağılımlar

ABSTRACT Circular data are a large class of directional data, which are interest in many fields. Examples include phenomena that are periodic in time, including those dependent on hours of the day (hospital visits, times of birth, etc.) or days of the year (unemployment or sales variations. The elementary but also fundamental property of circular data is that the beginning and end of the scale coincide: for example, 0° = 360°. An immediate implication is that the arithmetic mean is likely to be a poor summary: the mean of 1° and 359° cannot sensibly be 180°. The solution is use the vector mean direction as circular mean. The statistical analysis of angular or circular data differs from the analysis of linear data. Unlike linear distributions, which are often two-tailed and infinite, circular distributions exhibit finite closure because a circular data set comes back on itself, and therefore, 0° and 360° are actually the same point on a circle. Circular statistics is concerned mainly with observations which are unit vectors in the plane. Thus the sample space is typically a circle or a sphere, so that standart methods for analysing univariate or multivariate measurement data can't be used. Special circular methods are required take into account the structure of these sample spaces. In most circular statistical analyses, the null hypothesis is a uniform distribution in which all directions occur with equal probability. In this study, eight different testing methods improved for uniformity in angular data have been introduced and these methods were compared with each other by using the information obtained from the literature.

Key Words: Statistics, nonparametric; statistical distributions

Turkiye Klinikleri J Biostat 2015;7(2):126-30

doi: 10.5336/biostatic.2015-45099

Açısal bir değer ile ifade edilebilen gözlem değerleri, sınırlı bir doğrudan ziyade periyodik bir daire üzerinde tanımlanmaktadır. Dolayısıyla gözlem değerlerinin açı değeri ile ifade edildiği çalışmalarda verilerin, açısal veri olmasından kaynaklanan döngüsel doğası gereği, yapılacak istatistiksel analizlerde dikkatli olmak gerekmektedir. Çünkü bazı teorik ve deneysel sebeplerden dolayı, bu tür verilerin değerlendirilmesinde doğrusallığı dikkate alan yöntemlerin kullanılması sonucunda gerçekçi olmayan yorumlar ortaya çıkabilmektedir. Örneğin, 10^{0}'lik açı ile 350^{0}'lik açının aritmetik ortalaması 180^{0}'dir. Oysa bu açılar birbirinin zıddı olan açılardır ve sezgisel olarak aritmetik ortalama 0^{0} olmalıdır. Dolayısıyla özel olarak bu tür verilerin değerlendirilmesi amacıyla geliştirilmiş birçok istatistiksel yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemler, radyal veya eksenel yönlerde ortaya çıkan dairesel veya küresel bir olaya ait deneysel gözlemlerin analizi ile ilgili olarak özellikle biyoloji başta olmak üzere, bazı doğa ve yaşam bilimlerinde son otuz yılda yoğun bir şekilde kullanılmaktadır.[1,2]

Açısal veriler farklı yollar ile elde edilebilmektedir. Bu tür veriler özellikle saat ya da pusula gibi iki temel dairesel ölçüm aletinin kullanıldığı çalışmalarda kaçınılmazdır.[3] Açısal veriler, genellikle bir daire üzerinde derece cinsinden 0^{o}-360^{o} veya radyan cinsinden 0-2π arasında ölçülen verilerdir.[4] Araştırmaların bazılarında kullanılan ölçümler, doğrudan açı veya yön ile ilgili olabildiği gibi, bu tür ölçümlerin söz konusu olmadığı durumlarda bile ölçüm değerleri açı veya yön ölçümü şeklinde düşünülerek değerlendirilebilmektedir. Örneğin, birbirini ardışık takip eden günlerin öğle vaktinde bir şehirdeki rüzgarın yönü, ardışık olarak çevrilen bir rulet çarkının durma pozisyonu ya da göçmen kuşların gözden kaybolma esnasında ufukta meydana gelen durumları ile ilgili ölçümler açı ile ilgilidir. Ancak, bir hastanede bir günde doğan bebeklerin doğum saatleri veya bir bölgede bir yılda yeni lösemi tanılarının konulduğu günler açı veya yön ile ilgili değildir. Açı veya yön ile ilgili olmasa bile bu tür ölçümler de bir çemberin çevresinde yer alan noktalar ile ifade edilebildiği için açı veya yön ölçümleri olarak değerlendirilebilmektedir. Bunun için gözlem değerlerinin, açısal değerlere dönüştürülmesi gerekmektedir. Kullanılan zaman birimine göre herhangi bir gözlem değerine (x) karşılık gelecek açısal değerin (a) belirlenmesinde,

$$a = \frac{360 * x}{k}$$

eşitliği kullanılır.[5] Eşitlikte yer alan k değeri, ilgilenilen olaya ait gözlem yapılabilecek toplam zaman birimini (yılın günleri için 365, günün saatleri için 24, günün dakikaları için 1440 vb.) göstermektedir.

Açı veya yön ölçümlerinin değerlendirilmesi ile ilgili geliştirilmiş birçok test bulunmaktadır. Aynı amaca hizmet etmelerine rağmen bu testler literatürde, açısal (angular), dairesel (circular) veya yönsel (directional) ölçümlerin değerlendirilmesinde kullanılan testler şeklinde farklı isimler ile ifade edilmektedirler. Hangi isim ile ifade edilirse edilsin, bu testlerde kullanılan tekdüzelik kelimesi, gözlem değerlerinin, herhangi bir ortalama açısal değere sahip olmadığı, bunların bir dairenin çevresi üzerinde eşit olasılıklara sahip olduğu durumu ifade etmektedir.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ değerleri, araştırmadan elde edilen gözlem değerlerine karşılık gelen derece cinsinden açısal değerler olmak üzere bu değerler kullanılarak ortalama açısal değer (ρ);

Her bir a_i değeri bir kez gözlemlenmiş ise;

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} \cos a_i}{n}$$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sin a_i}{n}$$

her bir a_i değeri birden fazla sayıda (f_i) gözlemlenmiş ise;

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cos a_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \sin a_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

olmak üzere,

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\cos \bar{a} = \frac{X}{r}$$

$$\sin \bar{a} = \frac{Y}{r}$$

$$\theta_\rho = \arctan\left(\left|\frac{\sin \bar{a}}{\cos \bar{a}}\right|\right)$$

$$\rho = \begin{cases} \theta_\rho & \text{eğer} \quad \cos\bar{a} > 0 \; ve \; sin\bar{a} > 0 \; ise \\ 360 - \theta_\rho & \text{eğer} \quad \cos\bar{a} > 0 \; ve \; sin\bar{a} < 0 \; ise \\ 180 - \theta_\rho & \text{eğer} \quad \cos\bar{a} < 0, ve \; sin\bar{a} > 0 \; ise \\ 180 + \theta_\rho & \text{eğer} \quad \cos\bar{a} < 0, ve \; sin\bar{a} < 0 \; ise \end{cases}$$

radyan cinsinden açısal değerler söz konusu ise ortalama açısal değer (ρ);

$$\rho = \begin{cases} \theta_\rho & \text{eğer} \quad \cos\bar{a} > 0 \; ve \; sin\bar{a} > 0 \; ise \\ 2\pi + \theta_\rho & \text{eğer} \quad \cos\bar{a} > 0 \; ve \; sin\bar{a} < 0 \; ise \\ \pi + \theta_\rho & \text{eğer} \quad \cos\bar{a} < 0, ve \; sin\bar{a} > 0 \; ise \\ \pi + \theta_\rho & \text{eğer} \quad \cos\bar{a} < 0, ve \; sin\bar{a} < 0 \; ise \end{cases}$$

eşitlikleri yardımı ile elde edilir.[5]

r değeri, ortalama vektör uzunluğu olarak ifade edilmekte ve gözlem değerlerine ilişkin açısal değerlerin değişim ölçüsü olarak kullanılmaktadır. r = 0 olması gözlem değerlerinin herhangi bir ortalama açısal değere sahip olduğunu, r = 1 olması ise tüm gözlem değerlerinin tek bir yönde tam olarak yoğunlaştığını göstermektedir. Açısal veriler için tekdüzelik testlerinde kullanılacak hipotezler ise; $H_0 : \rho = 0$ ve $H_1 : \rho \neq 0$ şeklindedir.[5]

Bu çalışmanın amacı, dairesel verilerin analizinde kullanılan ve literatürde yer alan tekdüzelik testlerini tanıtmak ve literatürden elde edilen bilgilerden yararlanarak bu testleri birbirleri ile karşılaştırmaktır.

RAYLEIGH TESTİ[5,6]

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ değerleri araştırmadan elde edilen gözlem değerlerine karşılık gelen derece cinsinden açısal değerler olmak üzere bu değerler kullanılarak;

$$R = nr$$

$$z = \frac{R^2}{n} \text{ veya } z = nr^2$$

eşitlikleri kullanılarak elde edilen z değeri Rayleigh testi için geliştirilen $z_{a,n}$ tablo değeri ile karşılaştırılır. $z_{Hesap} < z_{Tablo}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir.

Rayleigh testi için $z_{a,n}$ tablo değerinden yararlanılabildiği gibi aşağıda verilen eşitliklerin kullanılması durumunda Ki-Kare tablosundan da yararlanılabilmektedir.[6] Buna göre test istatistiğinin değeri,

$$S = 2nr^2$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır. Test istatistiğine ait değer, serbestlik derecesi iki olan Ki-kare tablo değeri ile karşılaştırılır. $S < \chi^2_{Tablo}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir. İki serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına daha yakın bir yaklaşım uyarlanmış Rayleigh testi olarak ifade edilmektedir. Uyarlanmış Rayleigh test istatistiğinin değeri;

$$S = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) 2nr^2 + \frac{nr^4}{2}$$

eşitliği kullanılarak elde edilmektedir.

UYARLANMIŞ KUIPER TESTİ[6,7]

Adım 1. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ değerleri araştırmadan elde edilen gözlem değerlerine karşılık gelen derece cinsinden açısal değerler olmak üzere uyarlanmış Kuiper test istatistiğinin değeri;

$$V_n = \max_{i=1 \text{ to } n}\left(\frac{a_i}{360} - \frac{i}{n}\right) - \min_{i=1 \text{ to } n}\left(\frac{a_i}{360} - \frac{i}{n}\right) + \frac{1}{n}$$

değeri hesaplanır.

Adım 2. Test istatistiğinin değeri aşağıda verildiği biçimde hesaplanır.

$$V = V_n\left(\sqrt{n} + 0.155 + \frac{0.24}{\sqrt{n}}\right)$$

Adım 3. İkinci adımda elde edilen değer; a = 0.10 için 1.620, a = 0.05 için 1.747, a = 0.01 için 2.001 ile karşılaştırılır. $V_{Hesap} < V_{Tablo}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir. Uyarlanmış Kuiper testinin $n \leq 8$ olduğu durumlarda doğru sonuçlar verdiği ifade edilmektedir.

WATSON TESTİ[5,6]

Adım 1. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ değerleri araştırmadan elde edilen gözlem değerlerine karşılık gelen derece cinsinden açısal değerler olmak üzere Watson test istatistiğinin değeri;

$$u_i = \frac{a_i}{360}$$

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}$$

$$U^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[u_i - \frac{i - \frac{1}{2}}{n} - \bar{u} + \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{12n}$$

eşitliği kullanılarak elde edilmektedir.

Adım 2. Birinci adımda elde edilen değer; a = 0.10 için 0.152, a = 0.05 için 0.187, a = 0.01 için 0.267 değeri ile karşılaştırılır. $U^2_{Hesap} < U^2_{Tablo}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir. Watson testinin $n \geq 8$ olduğu durumlarda doğru sonuçlar verdiği ifade edilmektedir.

AJNE A_n TESTİ[6,8]

Adım 1. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ değerleri araştırmadan elde edilen gözlem değerlerine karşılık gelen radyan cinsinden açısal değerler olmak üzere açısal ortalama fark bulunur. Derece cinsinden verilen açısal değerlerin radyan cinsinden değerleri,

$$\text{Radyan} = \frac{\text{Derece} * \pi}{180}$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır.

$$\overline{D}_0 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{\pi - |(\pi - |a_i - a_j|)|\}$$

Adım 2. Test istatistiğinin değeri aşağıda verildiği biçimde hesaplanır.

$$A_n = n\left(\frac{1}{4} - \frac{\overline{D}_0}{2\pi}\right)$$

Adım 3. İkinci adımda elde edilen değer, Ajne A_n test tablosundan n ve a için elde edilen değer ile karşılaştırılır. $A_{n,Hesap} < A_{n,Tablo}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir.

HERMANS-RASSON TESTİ[6]

Adım 1. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ değerleri araştırmadan elde edilen gözlem değerlerine karşılık gelen radyan cinsinden açısal değerler olmak üzere test istatistiğinin değeri aşağıda verildiği biçimde hesaplanır.

$$H_n = 2\pi A_n - 2.895\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\left(|\sin(a_i - a_j)| - \frac{2}{\pi}\right)$$

Adım 2. Birinci adımda elde edilen değer; a = 0.10 için 0.60, a = 0.05 için 0.75, a = 0.01 için 1.09 değeri ile karşılaştırılır. $H_{n,Hesap} < H_{n,Tablo}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir.

HODGES-AJNE TESTİ[5,6,9]

Adım 1. Daire üzerinde yer alan doğru parçası (diametre veya dairenin çapı) b – a = 180° olacak şekilde a = 0°, b = 180°'den başlamak üzere a = 1°, b = 181°; a = 2°, b = 182°; a = 3°, b = 183° ... ..., a = 180°, b = 360° alınarak farklı açılar için saat yönünde döndürülür. Her döndürme sonucunda diametrenin sağında ve solunda kalan gözlem sayıları sayılır. Diametrenin ister sağında ister solunda 180°'lik genişlik içinde kalan en küçük gözlem sayısı (h) belirlenir.

Adım 2. Test istatistiğinin değeri aşağıda verildiği biçimde hesaplanır.

$$p(\text{En Küçük Gözlem Sayısı} \leq h) = \frac{\binom{n}{h}(n - 2h)}{2^{n-1}}$$

Adım 3. İkinci adımda elde edilen değer a ile karşılaştırılır. $p > a$ ise H_0 hipotezi kabul edilir.

RANGE TESTİ[6,9]

Adım 1. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ değerleri araştırmadan elde edilen gözlem değerlerine karşılık gelen derece cinsinden açısal değerler olmak üzere en büyük açı değeri ile en küçük açı değeri arasındaki fark bulunur.

Adım 2. Birinci adımda derece cinsinden elde edilen fark değeri radyana (q) dönüştürülür.

Adım 3. $1 - k[(2\pi - q)/(2\pi)] > 0$ koşulunu sağlayan en büyük k değeri bulunur.

Adım 4. Test istatistiğinin değeri aşağıda verildiği biçimde hesaplanır.

$$p(w \leq q) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}[1 - \frac{i(2\pi - q)}{2\pi}]^{n-1}$$

Adım 5. Dördüncü adımda elde edilen p değeri, a ile karşılaştırılır. $p > a$ ise H_0 hipotezi kabul edilir.

RAO SPACING TESTİ[10,11]

Adım 1. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ değerleri araştırmadan elde edilen gözlem değerlerine karşılık gelen derece cinsinden açısal değerler olmak üzere Rao Spacing test istatistiğinin değeri;

$$\lambda = \frac{360}{n}$$

$$T_i = a_{i+1} - a_i \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

$$T_n = (360 - a_n) + a_1 \qquad i = n$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|T_i - \lambda|$$

eşitliği kullanılarak elde edilmektedir.

Adım 2. Birinci adımda elde edilen U değeri, *n* ve *a* değerlerinden yararlanarak Rao Spacing test tablosundan elde edilen değer ile karşılaştırılır. $U_{Hesap} < U_{Tablo}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir.

SONUÇLAR

Literatürde, çalışmada dikkate alınan yöntemlerin birbirleri ile karşılaştırıldığı sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalardan elde edilen sonuçlara göre; güç bakımından gerçekte benzer sonuçlar vermelerine rağmen Ajne testinin, Watson ve uyarlanmış Kuiper testlerine göre az da olsa daha güçlü olduğu ifade edilmektedir.[8] Rao Spacing testinin ise birçok durumda Rayleigh ve uyarlanmış Kuiper testlerine göre oldukça güçlü olduğu belirtilmiştir.[11,12] Bahadur etkinliği bakımından, diğer yöntemler düşük asimtotik etkinlik değerlerine sahip olmasına rağmen Ajne testi, Watson testi ve Rayleigh testi diğerlerine göre daha yüksek ve birbirlerine benzer etkinlik değerine sahiptir. Uyarlanmış Kuiper testi ile Hodges-Ajne testinin performansları asimtotik olarak benzerdir. Ancak Ajne testi, Watson testi ve Rayleigh testlerinin etkinliği 1 olarak düşünülürse, uyarlanmış Kuiper ve Rayleigh testlerinin etkinlik değeri 0.81'dir. Rao Spacing testinin Bahadur asimtotik etkinlik değeri ise diğer tüm yöntemlere göre 0'dır.[12]

Uyum iyiliği testi olarak kullanıldıklarında; tek tepeli verilerde Watson testi ve Ajne testi diğer testlere göre çok güçlü ve birbirine oldukça benzer güce sahiptirler. İki tepeli verilerde Hermans-Rasson testi diğer testlere göre çok güçlüdür.[13] Cauchy dağılımına sahip tek tepeli, iki tepeli ve üç tepeli verilerde ise Rayleigh, Watson ve Kuiper testleri birbirlerine benzer ve diğer testlere göre daha fazla güce sahiptirler.[14] Uyarlanmış Kuiper testi, tek tepeli veya iki tepeli veriler için Ki-kare testinden daha güçlüdür.[4] Tek tepeli yapıların belirlenmesinde, küçük örnek büyüklükleri ve açısal yaygınlığın geniş olduğu durumlarda Rao Spacing testi, Rayleigh ve Watson testlerine göre biraz daha iyidir. Üç ve daha fazla sayıda tepe değerine sahip verilerde Hermans-Rasson testi diğer yöntemlere göre oldukça güçlüdür. İki tepeli yapıların belirlenmesinde, büyük örnek büyüklükleri ve açısal yaygınlığın az olduğu durumlarda Watson testine ait ikinci tür hata değeri daha düşüktür. Buna karşılık, Rao Spacing testi, küçük örneklem büyüklüğü ve geniş açısal dağılım kombinasyonları hariç çoğu koşullarda iki tepeli yapıların belirlenmesinde daha güçlüdür. Tekbiçimli veriler için örneklem büyüklüğünün küçük olduğu durumlarda Watson testi, büyük olduğu durumlarda ise Rao Spacing testi daha iyidir.[15] Watson testi, çok tepeli verilerde kullanılabilir ve özellikle küçük örneklem büyüklüğüne sahip çalışmalarda diğer yöntemlere göre gücü daha fazladır.[4]

KAYNAKLAR

1. Fahidy TZ. On the potential application of uniformity tests in circular statistics to chemical processes. International Journal of Chemistry 2013;5(1):31-8.
2. Guterman PS, Allison RS, Mc Cague H. The application of circular statistics to psychophysical research. Proceedings of the 25th Annual Meeting of the International Society for Psychophysics 2009;25:185-90.
3. Sun Z. Comparing measures of fit for circular distributions. MsC. Thesis, Department of Mathematics and Statistics, University of Victoria; 2006; p.3.
4. Scott A. Circular data: An overview with discussion of one-sample tests, Msc. Thesis, Department of Mathematical Sciences, Montana State University; 2002; p.1.
5. Zar JH. Circular distributions, Hypothesis testing. Biostatistical Analysis. 5th ed. New Jersey: Prentice Hall Int. Inc; 2010. p. 605-25.
6. Mardia KV, Jupp PE. Tests of uniformity and tests of goodness-of-fit, tests of uniformity. Directional Statistics. 2nd ed. London: John Wiley & Sons Ltd; 2000. p. 94-115.
7. Fisher NI. Analysis of a single sample of data, testing a sample of unit vectors for uniformity. Statistical Analysis of Circular Data. 1st ed. New York: Cambridge University Press; 1993. p. 64-71.
8. Stephens MA. A goodness-of-fit statistic for the circle, with some comparisons. Biometrika 1969;56(1):161-8.
9. Sprent P, Smeeton NC. Other single-sample inferences, angular data. Applied Nonparametric Statistical Methods. 3rd ed. Florida: Chapman & Hall / CRC; 2001. p. 105-9.
10. Rao JS. Some tests based on arc-lengths for the circle. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics B Series 1976;38(4):329-38.
11. Russell GS, Levitin DJ. An expanded table of probability values for Rao's spacing test. Communication Statist Simula 1996;24(4):879-88.
12. Rao JS. Bahadur efficiencies of some tests for uniformity on the circle. Ann Math Statist 1972;43(2):468-79.
13. Pycke JR. Some tests for uniformity of circular distributions powerful against multimodal alternatives. Can J Stat 2010;38(1):80-96.
14. Bogdan M, Bogdan K, Futschik A. A data driven smooth test for circular uniformity. Ann Inst Statist Math 2002;54(1):29-44.
15. Bergin TM. A comparison of goodness-of-fit tests for analysis of nest orientation in western kingbirds (Tyrannus verticalis). The Condor 1991;93:164-71.